

EVALUAREA NAȚIONALĂ PENTRU ABSOLVENȚII CLASEI a VIII-a

Matematică

Test 18

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de 2 ore.

SUBIECTUL I - Pe foaia de examen scrieți numai rezultatele.

(30 de puncte)

- 5p 1. Rezultatul calculului $20 : 4 + 10 \cdot 2$ este egal cu
- 5p 2. Cel mai mare divizor comun al numerelor 12 și 18 este egal cu
- 5p 3. Cel mai mare număr natural care aparține intervalului $[1, 5]$ este egal cu
- 5p 4. Dacă $\angle ABC$ și $\angle MNP$ sunt complementare și $m(\angle MNP) = 30^\circ$, atunci măsura unghiului ABC este egală cu ... $^\circ$.
- 5p 5. În Figura 1 este reprezentată o piramidă triunghiulară $VABC$ cu $VO \perp (ABC)$. Unghiul dreptelor AC și VO are măsura de ... $^\circ$.

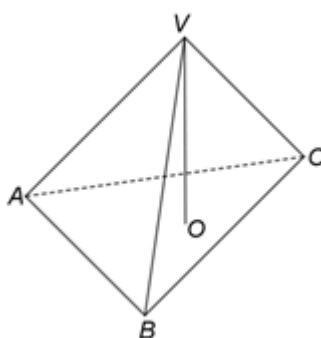
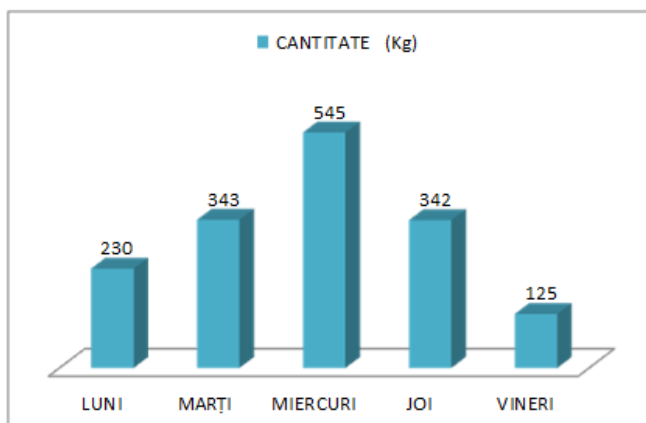


Figura 1

- 5p 6. În diagrama următoare sunt prezentate informații despre vânzările de fructe, în kilograme, înregistrate în zilele unei săptămâni, la un supermarket.



Conform informațiilor din diagramă, diferența dintre cantitatea de fructe vândută miercuri și cea vândută vineri este egală cu ... kg.

SUBIECTUL al II-lea - Pe foaia de examen scrieți rezolvările complete.

(30 de puncte)

- 5p 1. Desenați, pe foaia de examen, un cub $ABCD A'B'C'D'$.
- 5p 2. Calculați media aritmetică a numerelor naturale care sunt divizori ai lui 10.
- 5p 3. Numerele naturale x și y sunt direct proporționale cu numerele 3 și 4. Determinați cele două numere naturale, știind că x este cu 100 mai mic decât y .
4. Se consideră numerele reale $x = \sqrt{169} + 2\sqrt{12} + (\sqrt{2})^4$ și $y = 7 - \sqrt{48} + (\sqrt{2} + \sqrt{3})^2 + (\sqrt{2} - \sqrt{3})^2$.
- 5p a) Arătați că $x = 17 + 4\sqrt{3}$.
- 5p b) Arătați că produsul numerelor x și y este număr natural.

- 5p 5. Se consideră expresia $E(x) = (x-3)^2 - 3(x-10) - (x-4)(x+4)$, unde x este număr real. Determinați numerele naturale n pentru care $E(n) \geq 1$.

SUBIECTUL al III-lea - Pe foaia de examen scrieți rezolvările complete.

(30 de puncte)

1. În Figura 2 este reprezentat un romb $ABCD$ cu $AB = 12\text{ cm}$, $AC = 12\sqrt{3}\text{ cm}$ și triunghiurile echilaterale ABF și ADE .

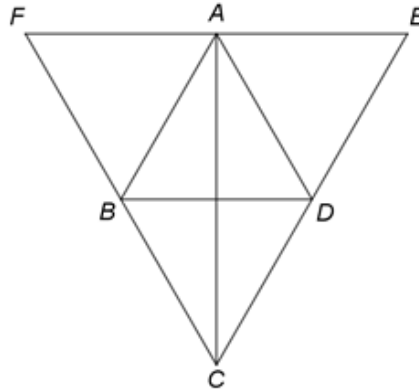


Figura 2

- 5p a) Arătați că $BD = 12\text{ cm}$.
- 5p b) Demonstrați că punctele F , A și E sunt coliniare.
- 5p c) Arătați că $AP = PQ = QC$, știind că P este punctul de intersecție a dreptelor AC și FD și Q este punctul de intersecție a dreptelor AC și BM , unde punctul M este mijlocul segmentului CD .

2. În Figura 3 este reprezentată o piramidă triunghiulară $VABC$ cu înălțimea VO , unde O este centrul cercului circumscris triunghiului echilateral ABC , $BC = 18\text{ cm}$ și $VM = 9\text{ cm}$, unde punctul M este mijlocul segmentului BC .

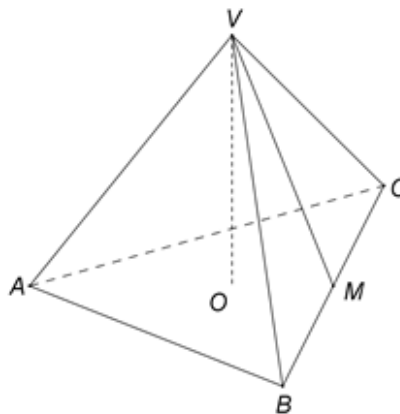
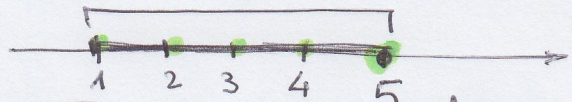


Figura 3

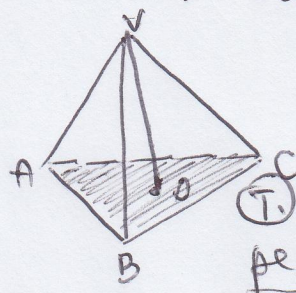
- 5p a) Arătați că perimetrul triunghiului ABC este egal cu 54 cm .
- 5p b) Calculați măsura unghiului VBC .
- 5p c) Demonstrați că dreptele VA și VM sunt perpendiculare.

TEST 18: - REZOLVARE

SUBIECTUL I: 1) $20:4 + 10 \cdot 2 = 5 + 20 = 25$;
 2) $\begin{array}{r} 12 \overline{) 2} \\ 6 \overline{) 2} \\ 3 \overline{) 3} \\ 1 \end{array}$ $\begin{array}{r} 18 \overline{) 2} \\ 9 \overline{) 3} \\ 3 \overline{) 3} \\ 1 \end{array}$ $\begin{array}{l} 12 = 2^2 \cdot 3 \\ 18 = 2 \cdot 3^2 \\ \text{c.m.m.d.c} = 2 \cdot 3 = 6 \end{array}$ $\begin{array}{l} \text{c.m.m.d.c} = \text{prod. fact. comuni} \\ \text{la puterea cea mai mică} \\ \text{c.m.m.m.c} = \text{prod. fact.} \\ \text{comuni \& necomuni la puterea} \\ \text{cea mai mare.} \end{array}$

3)  Numarul căutat este 5.
 4) Două unghiuri sunt „complementare” dacă, împreună, au 90° .
 „suplementare” 180° .

5) $m(\widehat{MNP}) = 30^\circ$; $m(\widehat{MNP}) + m(\widehat{ABC}) = 90^\circ \Rightarrow m(\widehat{ABC}) = 60^\circ$.
 $VO \perp (ABC)$
 $AC \subset (ABC) \Rightarrow VO \perp AC \Rightarrow m(\widehat{AC; VO}) = 90^\circ$.

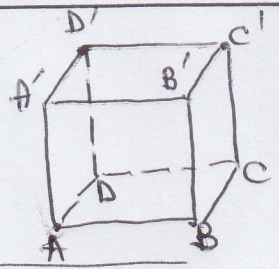


① O dreaptă perpendiculară pe plan este perpendiculară pe orice dreaptă din plan.

6) Miercuri ----- 545 kg
 Vineri ----- 125 kg } $\Rightarrow 545 - 125 = 420$ (kg)

SUBIECTUL al II-lea:

3) $\begin{cases} \frac{x}{3} = \frac{y}{4} \\ x = y - 100 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x = 3y \\ x - y = -100 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x - 3y = 0 \\ x - y = -100 \end{cases} \xrightarrow{\cdot (-4)} \begin{cases} 4x - 3y = 0 \\ -4x + 4y = 400 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x - 3y = 0 \\ y = 400 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 400 - 100 \\ y = 400 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 300 \\ y = 400 \end{cases}$
 $S = \{(300; 400)\}$



2) $n \in \mathbb{N}, n \in D_{10}$
 $D_{10} = \{1; 2; 5; 10\}$
 $m_a = \frac{1+2+5+10}{4} = \frac{18}{4} = 4,5$

R: Numerele sunt $300 = x$, respectiv $y = 400$.
 OBS: Am rezolvat problema cu ajutorul unui sistem de 2 ecuații lît mare, cu 2 necunoscute (cl. a VII-a). In barem nu folosește proprietatea nrului de rapoarte egale (proporție) (cl. a VII-a).

4) a) $x = \sqrt{169} + 2\sqrt{12} + (\sqrt{2})^4 = 13 + 2 \cdot 2\sqrt{3} + 2^2 = 13 + 4\sqrt{3} + 4 = 17 + 4\sqrt{3}$ (g.e.d.)
 $(\sqrt{2})^4 = \sqrt{2^4} = 2^2 = 4$ (cine nu recunoaște pătratul perfect?)

b) $\sqrt{48} = \sqrt{16 \cdot 3} = \sqrt{16} \sqrt{3} = 4\sqrt{3}$; $(\sqrt{2} + \sqrt{3})^2 = (\sqrt{2})^2 + 2\sqrt{2} \cdot \sqrt{3} + (\sqrt{3})^2 = 2 + 2\sqrt{6} + 3 = 5 + 2\sqrt{6}$
 $(\sqrt{2} - \sqrt{3})^2 = (\sqrt{2})^2 - 2\sqrt{2} \sqrt{3} + (\sqrt{3})^2 = 2 - 2\sqrt{6} + 3 = 5 - 2\sqrt{6}$

$$y = 7 - 4\sqrt{3} + (5 + 2\sqrt{6}) + (5 - 2\sqrt{6}) = 7 - 4\sqrt{3} + 5 + 2\sqrt{6} + 5 - 2\sqrt{6} = 17 - 4\sqrt{3}.$$

$$\text{Produsul } xy = (17 + 4\sqrt{3})(17 - 4\sqrt{3}) = 17^2 - (4\sqrt{3})^2 = 289 - 16 \cdot 3 = 289 - 48 = 241, \text{ iar } 241 \in \mathbb{N}. \text{ Deci } xy = 241 \in \mathbb{N}, \text{ g.e.d.}$$

$$5) E(x) = x^2 - 6x + 9 - 3x + 30 - (x^2 - 16) = \underbrace{x^2 - 6x + 9}_{(x-3)^2} - \underbrace{3x + 30}_{(x-4)(x+4)} + \underbrace{16}_{x^2 - 16} = -9x + 55. \text{ Deci } E(x) = -9x + 55, \text{ pentru orice } x \in \mathbb{R},$$

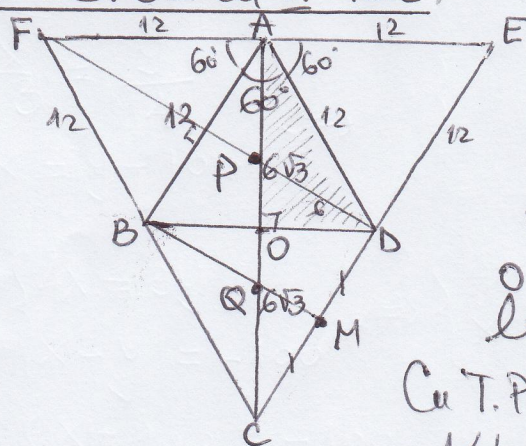
$$m \in \mathbb{N}, E(m) = -9m + 55$$

$$E(m) \geq 1 \Leftrightarrow -9m + 55 \geq 1 \Leftrightarrow -9m \geq 1 - 55 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -9m \geq -54 \quad | \cdot (-1) \quad \begin{matrix} \text{co} \rightarrow \text{ineq.} \\ \text{se r\ddot{a}stoarn\ddot{a}} \end{matrix} \quad \Leftrightarrow 9m \leq 54 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow m \leq \frac{54}{9} \Leftrightarrow m \leq 6, m \in \mathbb{N} \Rightarrow m \in \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6\}.$$

SUBIECTUL al III-lea:



a) Diagonalele rombului sunt perpendiculare și se înjumătățesc.

Deci $\triangle AOD$: dreptunghic în O

$AO = \frac{AC}{2} = \frac{12\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3} \text{ (cm)},$ unde O este punctul de intersecție a diagonalelor rombului: $AC \cap BD = \{O\}.$

$$\text{Cu T.P. avem: } OD^2 = AD^2 - OA^2 = 12^2 - (6\sqrt{3})^2 = 144 - 36 \cdot 3 = 144 - 108 = 36 \Rightarrow OD = \sqrt{36} = 6 \text{ (cm).}$$

$$BD = 2 \cdot OD = 2 \cdot 6 = 12 \text{ (cm), g.e.d.}$$

b) $AB = AD = 12 \text{ cm (ip.)}; BD = 12 \text{ cm (a)} \Rightarrow \triangle ABD$: echilateral $\Rightarrow m(\widehat{BAD}) = 60^\circ$

$$\left. \begin{array}{l} \triangle ABF \text{ : echilateral } \Rightarrow m(\widehat{BAF}) = 60^\circ \\ \triangle ADE \text{ : echilateral } \Rightarrow m(\widehat{DAE}) = 60^\circ \end{array} \right\} \Rightarrow m(\widehat{FAE}) = m(\widehat{FAB}) + m(\widehat{BAD}) + m(\widehat{DAE}) = 3 \cdot 60^\circ = 180^\circ \Rightarrow$$

$\Rightarrow F, A, E$: coliniare, g.e.d.

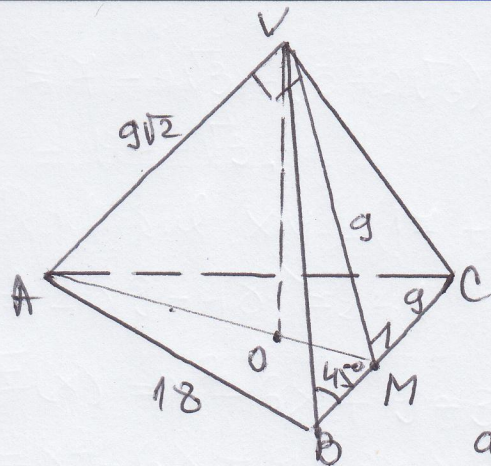
c) $BD = DA' = AF = FB = 12 \text{ cm} \Rightarrow AFBD$: romb $\Rightarrow FD \perp AB \Rightarrow P$ este ^① centrul (de greutate) al $\triangle ABD$ echilateral $\Rightarrow AP = \frac{2}{3} AO = \frac{2}{3} \cdot 6\sqrt{3} = 4\sqrt{3} \text{ (cm)}$

$\triangle CBD$: echilateral $\Rightarrow BM, CO$: mediane $\Rightarrow Q$ este centrul (de greutate) al $\triangle CBD \Rightarrow CQ = \frac{2}{3} \cdot CO = \frac{2}{3} \cdot 6\sqrt{3} = 4\sqrt{3} \text{ (cm). } \textcircled{2}$

$$QP = AC - (AP + CQ) = 12\sqrt{3} - (4\sqrt{3} + 4\sqrt{3}) = 12\sqrt{3} - 8\sqrt{3} = 4\sqrt{3} \text{ (cm)} \textcircled{3}$$

Din ①, ② și ③ $\Rightarrow AP = PQ = QC = 4\sqrt{3} \text{ cm, g.e.d.}$

2)

 $\triangle ABC$: echilateral

VO: înălțimea piramidei

O: centrul (cercului circumscris) $\triangle ABC$ $\Rightarrow VABC$: piramidă triunghiulară regulată.

VM: apotema piramidei

a) $\triangle ABC$: echilateral $\Rightarrow P_{\triangle ABC} = 3l = 3 \cdot 18 = 54$ (cu), g. e. d.

b) $BC = AB = 18$ cm, M: mijlocul lui $[BC] \Rightarrow BM = MC = \frac{18}{2} = 9$ (cu).
 VM: apotema piramidei regulate $\Rightarrow \triangle VMB$: dreptunghic.
 Dar $VM = 9$ cm $= BM \Rightarrow \triangle BMV$: dreptunghic isoscel $\Rightarrow$
 $\Rightarrow m(\widehat{VBM}) = 45^\circ = m(\widehat{VBC})$.

c) În $\triangle VMB$: dr. isoscel ipotenuza $VB = VM\sqrt{2} = 9\sqrt{2}$ (cu).
 $VA = VB = VC = 9\sqrt{2}$ cu.
 $AM = \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{18\sqrt{3}}{2} = 9\sqrt{3}$ (cu)

În $\triangle VAM$ avem $AM^2 = VA^2 + VM^2$ pentru că
 $(9\sqrt{3})^2 = (9\sqrt{2})^2 + 9^2 \Rightarrow$
 $\Leftrightarrow 3 \cdot 9^2 = 2 \cdot 9^2 + 9^2$ (A)

$\Rightarrow \triangle VAM$ este dreptunghic, cu $m(\widehat{AVM}) = 90^\circ$ (R.T. Pitagora),
 deci $VA \perp VM$, g. e. d.

EVALUAREA NAȚIONALĂ PENTRU ABSOLVENȚII CLASEI a VIII-a

Matematică

BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

Test 18

- Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.

SUBIECTUL I

- Se punctează doar rezultatul, astfel: pentru fiecare răspuns se acordă fie 5 puncte, fie 0 puncte.
- Nu se acordă punctaje intermediare.

SUBIECTUL al II-lea și SUBIECTUL al III-lea

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

1.	25	5p
2.	6	5p
3.	5	5p
4.	60	5p
5.	90	5p
6.	420	5p

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1.	Desenează cubul Notează cubul $ABCD A'B'C'D'$	4p 1p
2.	Numerele naturale 1, 2, 5 și 10 sunt divizorii lui 10 $m_a = \frac{1+2+5+10}{4} = \frac{18}{4} = 4,5$	3p 2p
3.	$\frac{x}{3} = \frac{y}{4} = k$, unde k este număr rațional, deci $x = 3k$ și $y = 4k$ $x = y - 100$, deci $k = 100$, de unde obținem $x = 300$ și $y = 400$	2p 3p
4.	a) $x = 13 + 4\sqrt{3} + \sqrt{16} =$ $= 13 + 4\sqrt{3} + 4 = 17 + 4\sqrt{3}$ b) $y = 7 - 4\sqrt{3} + 2 + 2\sqrt{6} + 3 + 2 - 2\sqrt{6} + 3 = 17 - 4\sqrt{3}$ $xy = (17 + 4\sqrt{3})(17 - 4\sqrt{3}) = 17^2 - (4\sqrt{3})^2 = 289 - 48 = 241$, care este număr natural	3p 2p 3p
5.	$E(x) = x^2 - 6x + 9 - 3x + 30 - x^2 + 16 = -9x + 55$, pentru orice număr real x $E(n) \geq 1 \Leftrightarrow -9n + 55 \geq 1$, deci $n \leq 6$ și, cum n este număr natural, obținem $n \in \{0, 1, 2, \dots, 6\}$	3p 2p

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1.	a) $ABCD$ romb, deci $AC \perp BD$, deci $\triangle AOB$ este dreptunghic, unde O este punctul de intersecție a dreptelor AC și BD $BO = \sqrt{AB^2 - AO^2} = \sqrt{144 - 108} = 6$ cm și, cum O este mijlocul lui BD , obținem $BD = 12$ cm b) $AB = AD = BD \Rightarrow \triangle ABD$ este echilateral, deci $m(\sphericalangle BAD) = 60^\circ$ $m(\sphericalangle FAE) = m(\sphericalangle FAB) + m(\sphericalangle BAD) + m(\sphericalangle DAE) = 60^\circ + 60^\circ + 60^\circ = 180^\circ$, deci punctele F , A și E sunt coliniare	2p 3p 2p 3p
----	--	----------------------

	c) $AF = AE$ și punctele F, A și E sunt coliniare, deci CA este mediană în $\triangle CEF$ și $DC = DE$ și punctele C, D și E sunt coliniare, deci FD este mediană în $\triangle CEF$ și, cum $\{P\} = AC \cap FD$, obținem că P este centrul de greutate al $\triangle CEF$, deci $AP = \frac{AC}{3}$ $\{Q\} = AC \cap BM$, BM și CO mediane în $\triangle BCD \Rightarrow Q$ este centrul de greutate al $\triangle BCD$, deci $CQ = \frac{2}{3} \cdot CO \Rightarrow CQ = \frac{AC}{3}$, de unde obținem $AP = PQ = QC$	3p 2p
2.	a) $\triangle ABC$ este echilateral, deci $P_{\triangle ABC} = 3BC = 3 \cdot 18 = 54 \text{ cm}$ b) VM este mediană în $\triangle VBC$ și $VM = \frac{BC}{2} \Rightarrow \triangle VBC$ este dreptunghic în V $VO \perp (ABC)$, unde O este centrul cercului circumscris triunghiului $ABC \Rightarrow \triangle VOB \equiv \triangle VOC$, deci $BV = CV$, de unde obținem că $\triangle VBC$ este dreptunghic isoscel, deci $m(\sphericalangle VBC) = 45^\circ$ c) $\triangle ABC$ echilateral $\Rightarrow AB = AC = BC$ și, cum $VA = VB = VC$, obținem $\triangle VAB \equiv \triangle VAC \equiv \triangle VBC$ $VA \perp VB$, $VA \perp VC$, $\{V\} = VB \cap VC \Rightarrow VA \perp (VBC)$ și, cum $VM \subset (VBC)$, obținem $VA \perp VM$	2p 3p 2p 3p 2p 3p